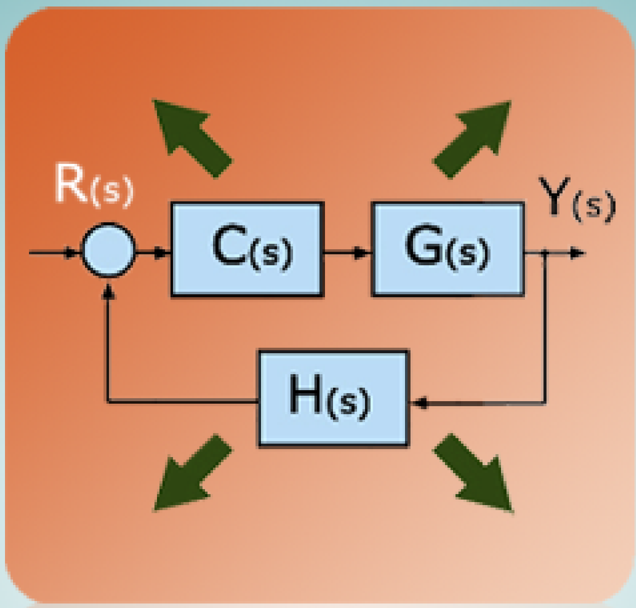
Automática

Ejercicios

Capítulo 2. Diagramas de Bloques y Flujogramas



José Ramón Llata García

Esther González Sarabia

Dámaso Fernández Pérez

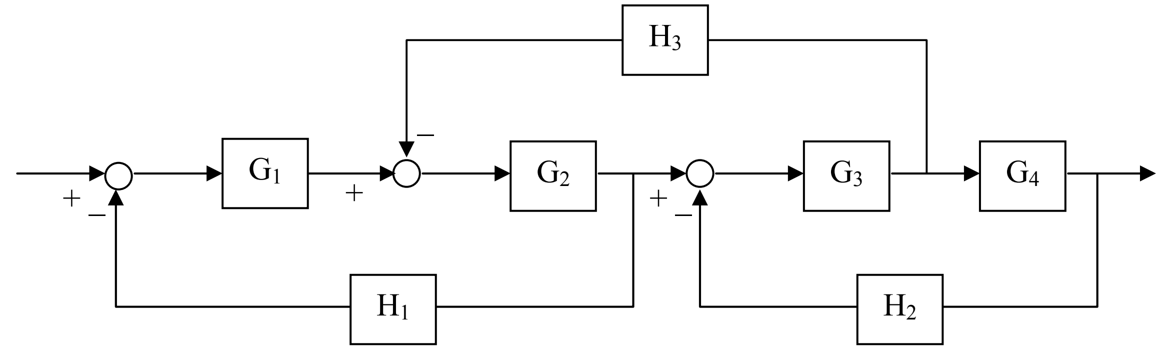
Carlos Torre Ferrero

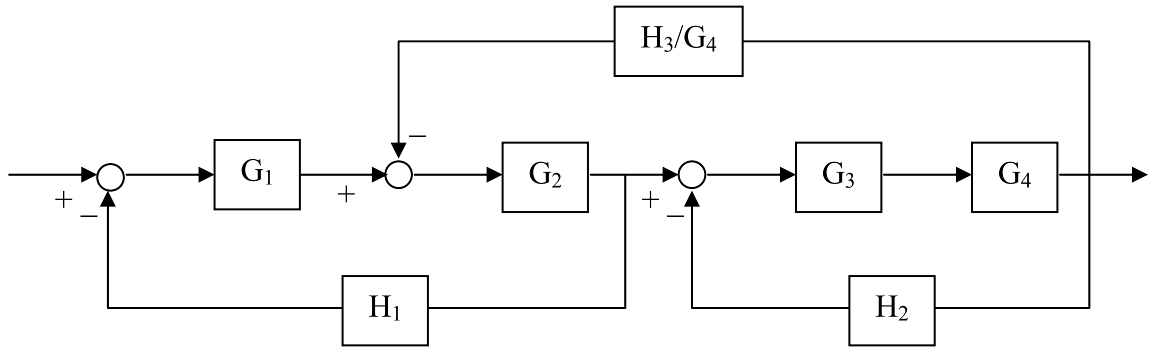
María Sandra Robla Gómez

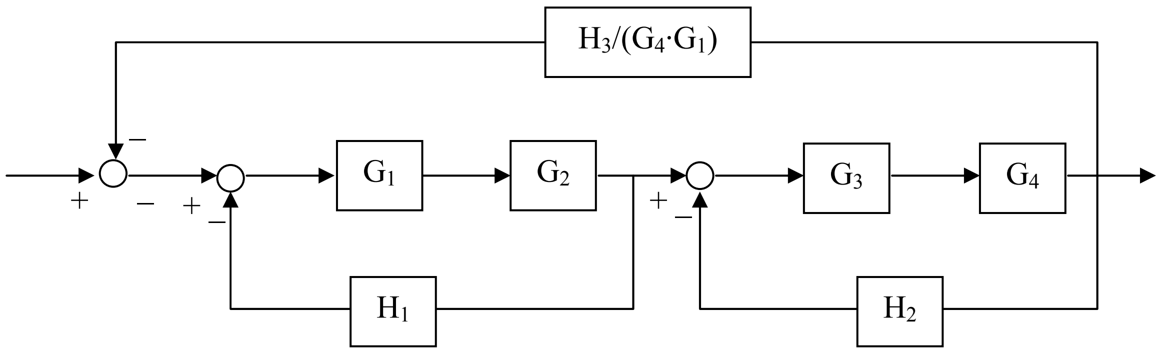
Departamento de Tecnología Electrónica
e Ingeniería de Sistemas y Automática

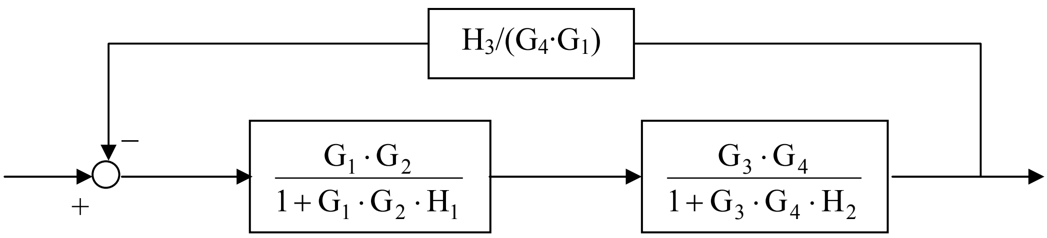
EJERCICIO 2.1.

Obtener la función de transferencia del siguiente diagrama de bloques:







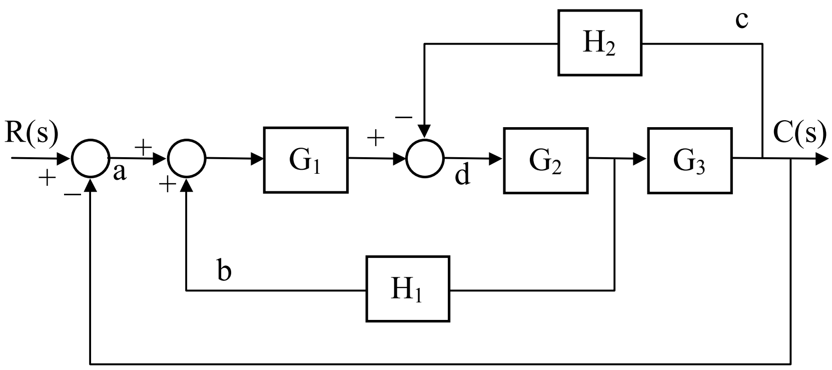


$$\frac{\dfrac{G_1 \cdot G_2}{1+G_1 \cdot G_2 \cdot H_1}\,\dfrac{G_3 \cdot G_4}{1+G_3 \cdot G_4 \cdot H_2}}{1+\dfrac{G_1 \cdot G_2}{1+G_1 \cdot G_2 \cdot H_1}\,\dfrac{G_3 \cdot G_4}{1+G_3 \cdot G_4 \cdot H_2}\,\dfrac{H_3}{G_4 G_1}}$$

$$\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1+G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_2}$$

EJERCICIO 2.2.

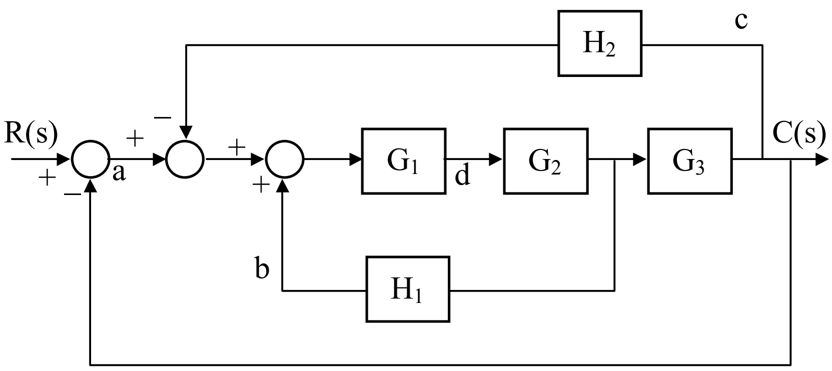
Obtener la función de transferencia global del sistema mediante el movimiento de bloques.



La señal en el punto d será:

$$d = (a + b)G_1 - cH_2 = aG_1 + bG_1 - cH_2$$

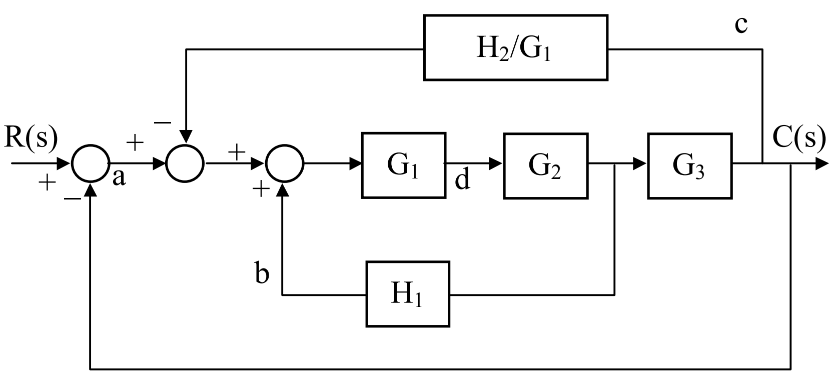
Se mueve el bloque restador cuya salida es el punto d hasta situarlo a continuación del punto de suma a:



Se analiza ahora de que está formada la señal que llega al punto d:

$$d = (a - cH_2 + b)G_1 = aG_1 + bG_1 - cH_2G_1$$

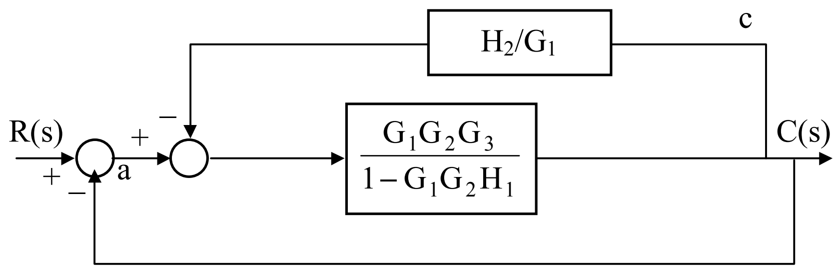
Con respecto al valor inicial de la señal se puede observar que sobra G_1 en el último sumando. Para resolver esto se dividirá el bloque H_2 entre G_1.



Resolviendo el bucle interno:

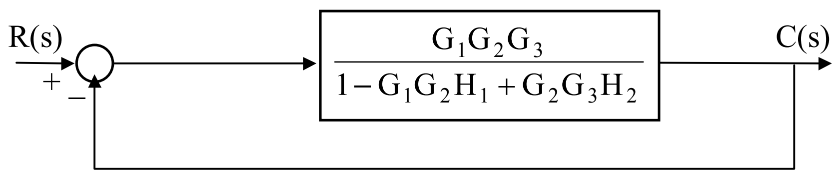
$$M_1(s) = \frac{G_1G_2}{1 - G_1G_2H_1}$$

Con lo que el diagrama de bloques ahora será:



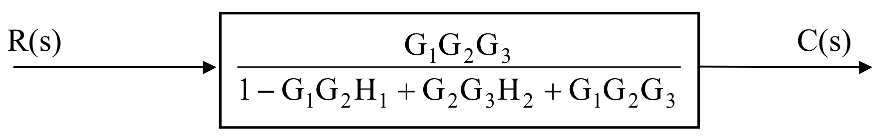
Resolviendo el lazo interno entre a y c:

$$M_2(s) = \frac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1}}{1 + \dfrac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1} \cdot \dfrac{H_2}{G_1}} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2}$$

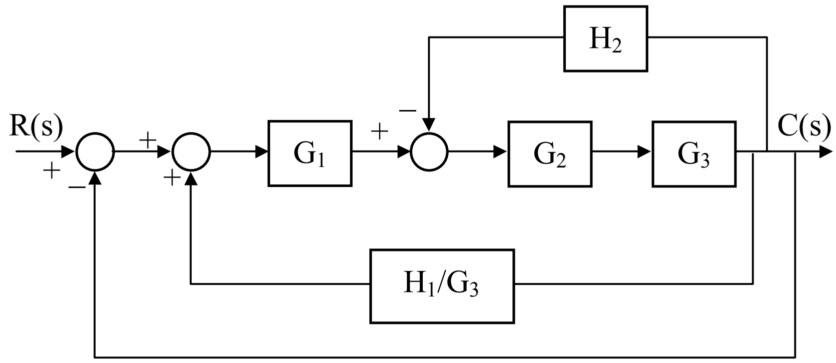


Y resolviendo el último lazo:

$$M_3(s) = \frac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2}}{1 + \dfrac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2}} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$$

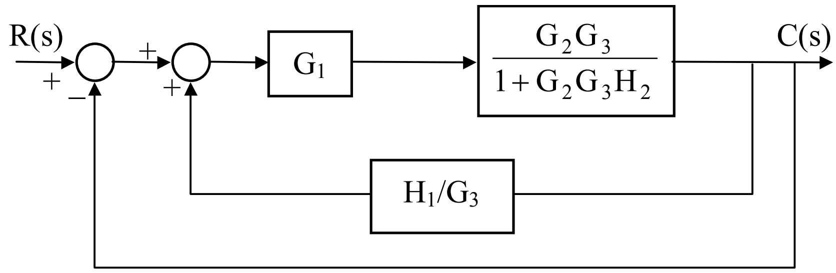


Otra posible forma de resolver sería moviendo la señal de realimentación tomada a la salida del bloque G_2 hasta la salida del bloque G_3. De esta forma modificando los bloques afectados se tendría:



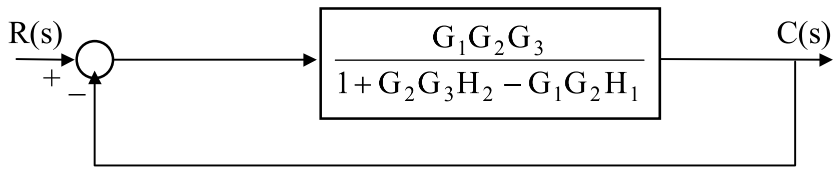
Resolviendo el bloque más interno:

$$M_1(s) = \frac{G_2G_3}{1+G_2G_3H_2}$$



Resolviendo el lazo más interno nuevamente:

$$M_2(s) = \frac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2}}{1-\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2}\cdot\dfrac{H_1}{G_3}} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2-G_1G_2H_1}$$

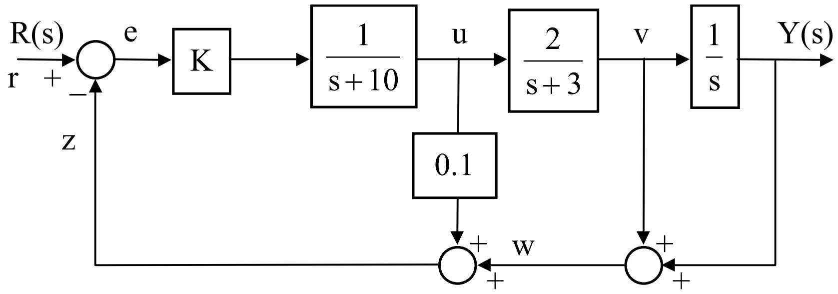


Y resolviendo el último lazo:

$$M_3(s) = \frac{\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2-G_1G_2H_1}}{1+\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2-G_1G_2H_1}} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2-G_1G_2H_1+G_1G_2G_3}$$

EJERCICIO 2.3.

Para el diagrama de bloques de la figura encontrar G_{eq} y H_{eq} de forma analítica y gráfica.



Analíticamente:

$$e = r - z = r - (0.1u + w) = r - (0.1u + v + \frac{1}{s}v) = r - \left(0.1u + \frac{s+1}{s}v\right) =$$

$$= r - \left(0.1u + \frac{s+1}{s} \cdot \frac{2}{s+3}u\right) = r - \left(0.1 + \frac{2(s+1)}{s(s+3)}\right) \cdot u = r - \left(0.1 + \frac{2(s+1)}{s(s+3)}\right) \cdot \frac{K}{s+10} \cdot e$$

$$e = r - \left(0.1 + \frac{2(s+1)}{s(s+3)}\right) \cdot \frac{K}{s+10} \cdot e$$

$$e\left(1 + \frac{0.1K}{s+10} + \frac{2K(s+1)}{s(s+3)(s+10)}\right) = r$$

$$e = \frac{1}{1 + \frac{0.1K}{s+10} + \frac{2K(s+1)}{s(s+3)(s+10)}} \cdot r = \frac{1}{\frac{s(s+3)(s+10) + 0.1Ks(s+3) + 2K(s+1)}{s(s+3)(s+10)}} \cdot r$$

$$e = \frac{s(s+3)(s+10)}{s^3 + (13+0.1K)s^2 + (30+2.3K)s + 2K} \cdot r$$

Por otro lado, la función de transferencia de lazo directo es directa:

$$y = \frac{2K}{s(s+3)(s+10)} \cdot e$$

$$G(s) = \frac{y}{e} = \frac{2K}{s(s+3)(s+10)}$$

Entonces, la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{2K}{s(s+3)(s+10)}\cdot e}{\dfrac{s^3+(13+0.1K)s^2+(30+2.3K)s+2K}{s(s+3)(s+10)}\cdot e}$$

$$M(s)=\frac{2K}{s^3+(13+0.1K)s^2+(30+2.3K)s+2K}$$

Se busca ahora descomponer dicha función de lazo cerrado en las funciones correspondientes a la cadena directa, cuyo valor ya se conoce, y la realimentación.

$$M(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Para este sistema, sustituyendo el valor de la cadena directa:

$$M(s)=\frac{\dfrac{2K}{s(s+3)(s+10)}}{1+\dfrac{2K}{s(s+3)(s+10)}H(s)}=\frac{2K}{s(s+3)(s+10)+2K\cdot H(s)}=\frac{2K}{s^3+13s^2+30s+2K\cdot H(s)}$$

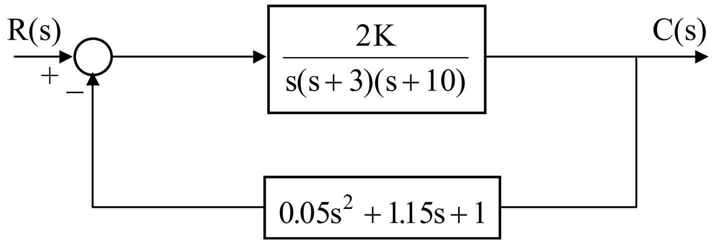
Luego igualando los denominadores de las dos expresiones obtenidas para M(s):

$$s^3+(13+0.1K)s^2+(30+2.3K)s+2K=s^3+13s^2+30s+2K\cdot H(s)$$

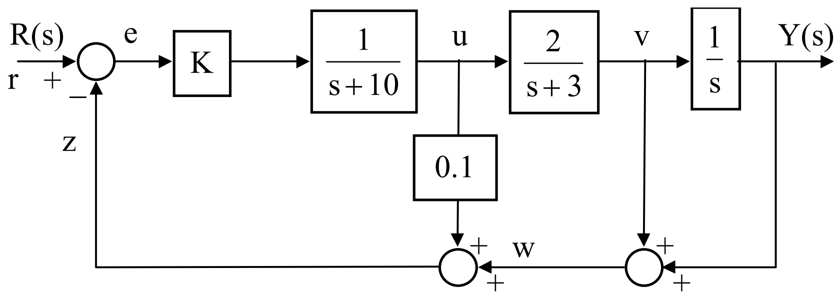
$$s^3+13s^2+30s+0.1Ks^2+2.3Ks+2K=s^3+13s^2+30s+2K\cdot H(s)$$

$$0.1Ks^2+2.3Ks+2K=2K\cdot H(s)$$

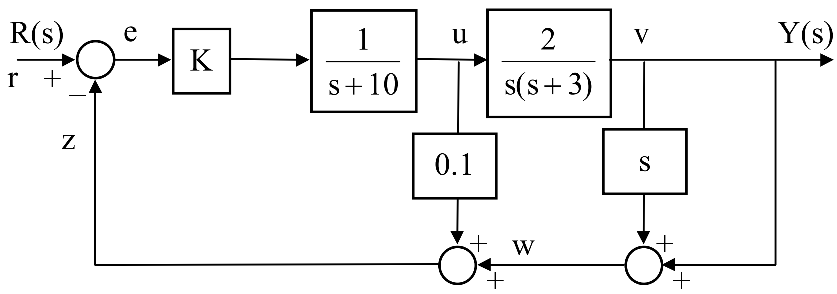
$$H_{eq}=0.05s^2+1.15s+1$$



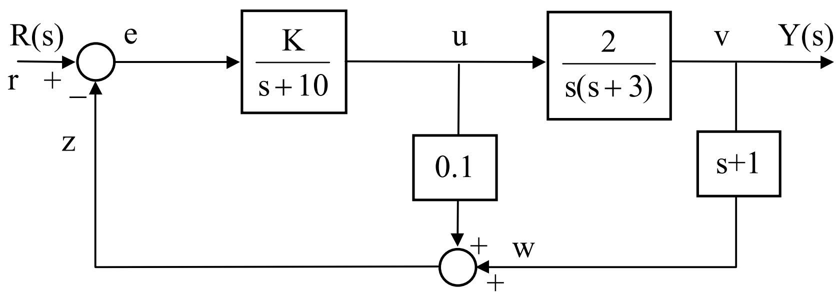
Resolviendo ahora de forma gráfica:



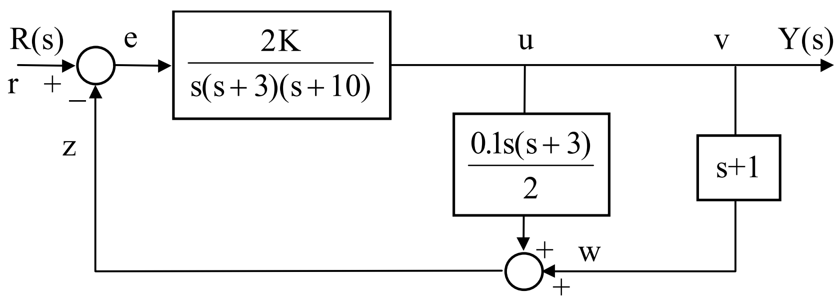
Pasando el último bloque delante del punto de bifurcación v:



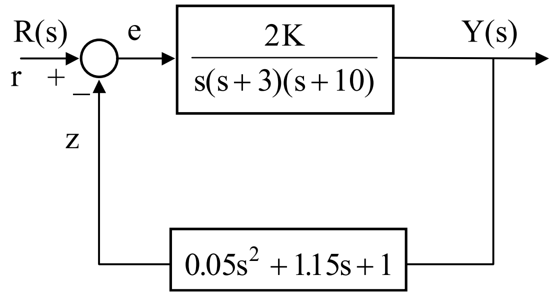
Agrupando las funciones de transferencia del último sumador:



Moviendo el bloque $\dfrac{2}{s(s+3)}$ delante del punto de bifurcación u:

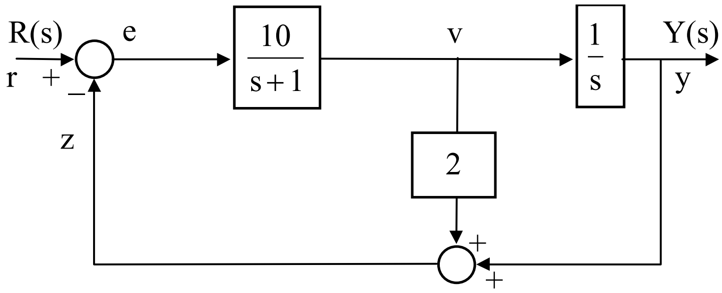


Agrupando los dos elementos del sumador:



EJERCICIO 2.4.

Para el diagrama de bloques mostrado en la figura calcular las funciones de transferencia G(s) y H(s) equivalentes de forma analítica y gráfica. Calcular también la función de transferencia G(s) equivalente para que el sistema tenga realimentación unitaria.



Analíticamente:

$$e = r - z = r - (2v + y) = r - \left(2v + \frac{1}{s}v\right) = r - \left(2 + \frac{1}{s}\right)v = r - \left(2 + \frac{1}{s}\right)\frac{10}{s+1}e$$

$$e = r - \left(2 + \frac{1}{s}\right)\left(\frac{10}{s+1}\right)e$$

$$e\left[1 + \left(\frac{2s+1}{s}\right)\left(\frac{10}{s+1}\right)\right] = r$$

$$e = \frac{r}{1 + \dfrac{20s+10}{s^2+s}} = \frac{s^2+s}{s^2+21s+10}\cdot r = \frac{s(s+1)}{s^2+21s+10}\cdot r$$

La función de transferencia de cadena directa se obtiene de forma directa:

$$G(s) = \frac{y}{e} = \frac{10}{s(s+1)}$$

$$y = \frac{10}{s(s+1)}e$$

Y la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{10}{s(s+1)}e}{\frac{s^2+21s+10}{s(s+1)}e} = \frac{10}{s^2+21s+10}$$

Sabiendo que:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

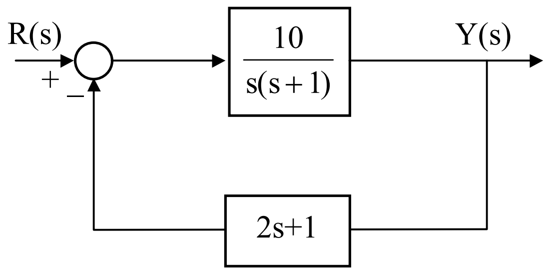
$$M(s) = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1+\frac{10}{s(s+1)}\cdot H(s)} = \frac{10}{s^2+s+10\cdot H(s)}$$

Igualando los denominadores de las dos funciones de transferencia M(s) obtenidas:

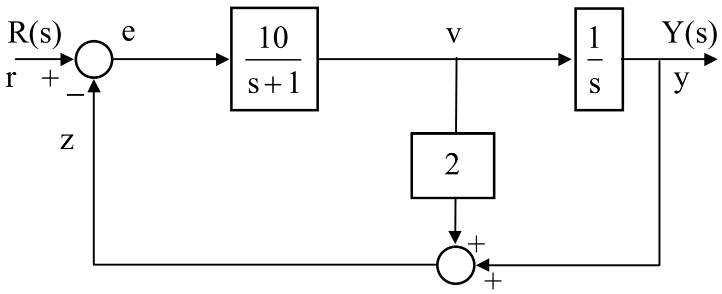
$$s^2+21s+10 = s^2+s+10\cdot H(s)$$

$$20s+10 = 10\cdot H(s)$$

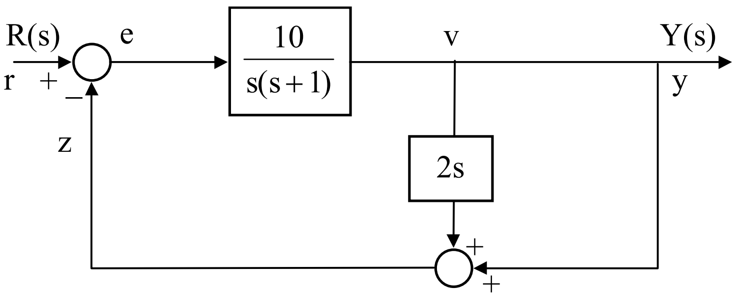
$$H(s) = 2s+1$$



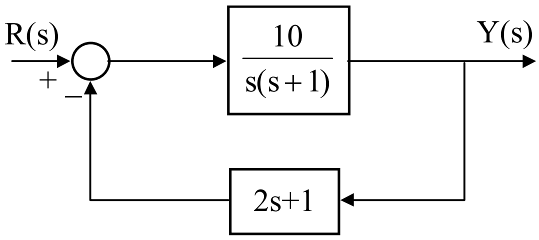
Resolviendo el diagrama de bloques de forma gráfica:



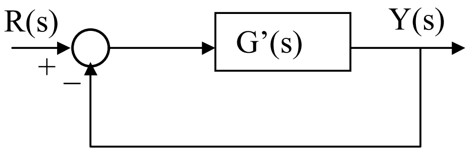
Moviendo el último bloque delante del punto v:



Uniendo los elementos del sumador:



Si se desea que H_{eq} sea 1:

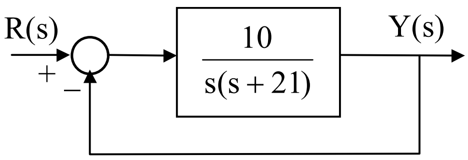


Como la función de transferencia de lazo cerrado es:

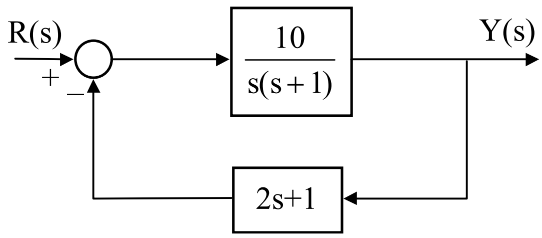
$$M(s) = \frac{10}{s^2 + 21s + 10}$$

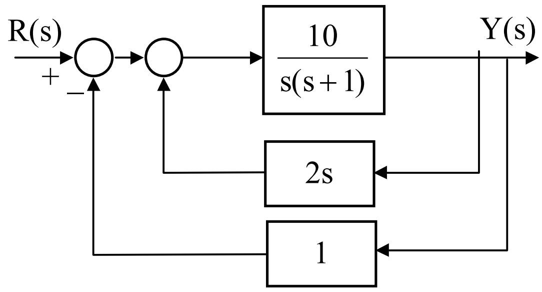
Dividiendo el numerador y denominador de M(s) entre $s^2 + 21s$ se tiene:

$$M(s) = \frac{\dfrac{10}{s^2 + 21s}}{\dfrac{s^2 + 21s}{s^2 + 21s} + \dfrac{10}{s^2 + 21s}} = \frac{\dfrac{10}{s^2 + 21s}}{1 + \dfrac{10}{s^2 + 21s}} = \frac{G'(s)}{1 + G'(s)}$$

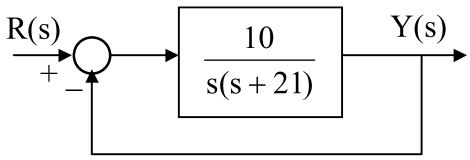


De forma gráfica partiendo de la función obtenida con G_{eq} y H_{eq}:



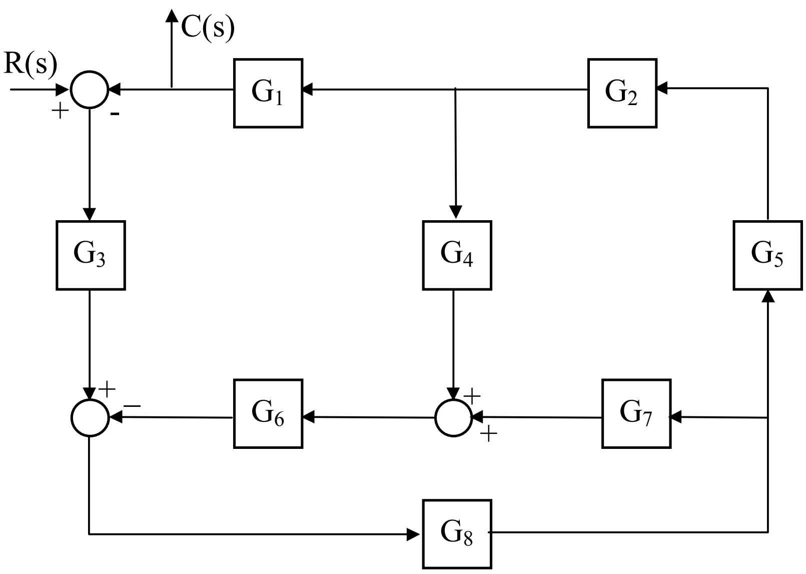


$$G'(s)=\frac{\dfrac{10}{s(s+1)}}{1+\dfrac{10}{s(s+1)}\cdot 2s}=\frac{\dfrac{10}{s(s+1)}}{\dfrac{s^2+s+20s}{s(s+1)}}=\frac{10}{s^2+21s}=\frac{10}{s(s+21)}$$



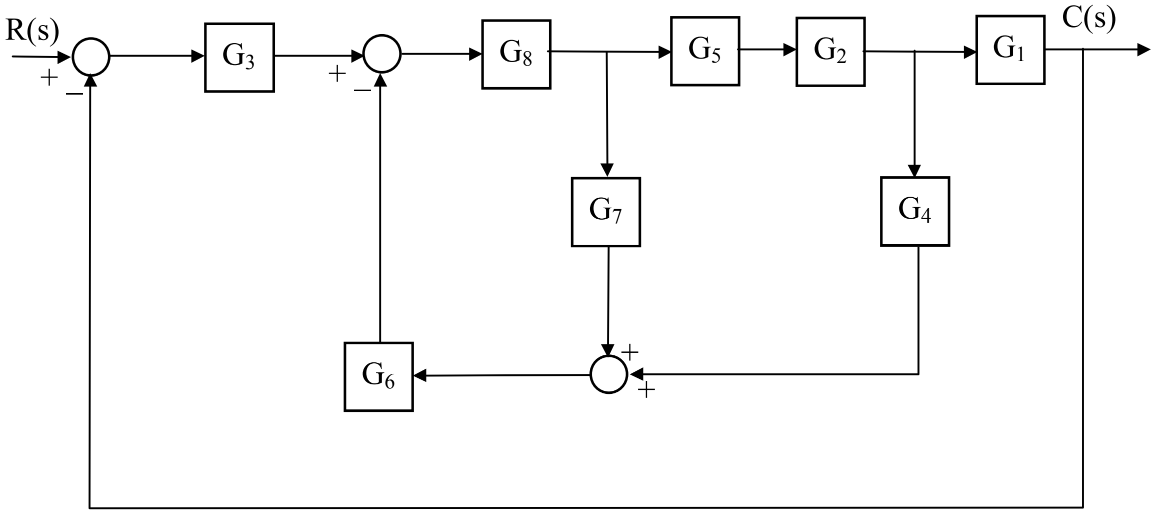
EJERCICIO 2.5.

Resolver el siguiente diagrama de bloques de forma gráfica y mediante la técnica de los flujogramas.

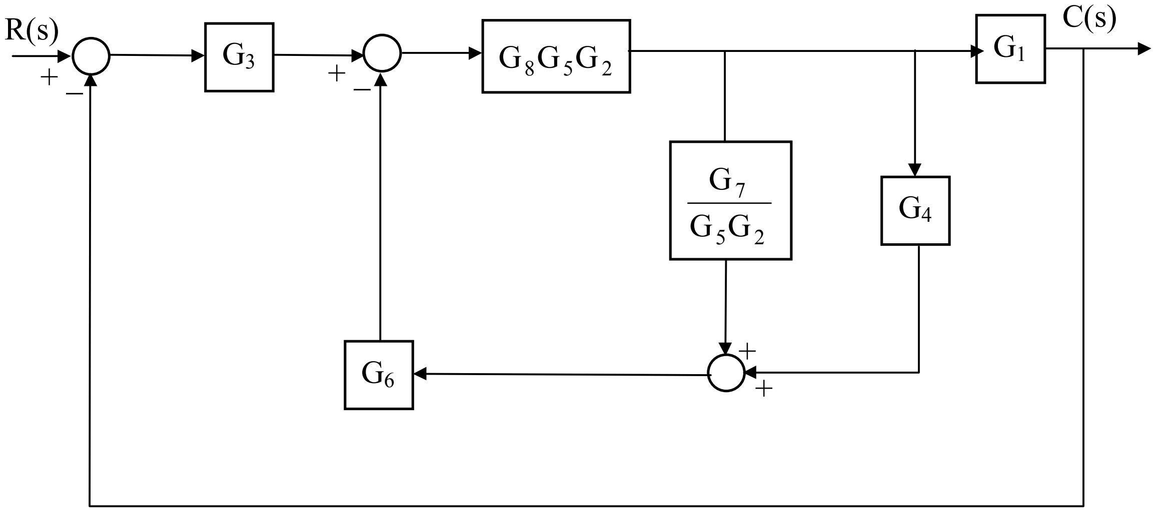


Resolviendo primero gráficamente:

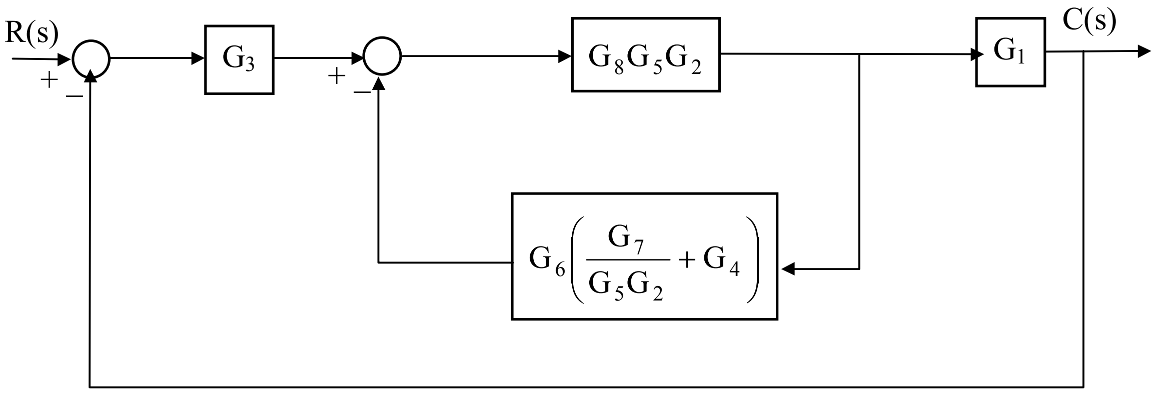
En primer lugar se ha ordenado el diagrama de bloques de la forma típica:

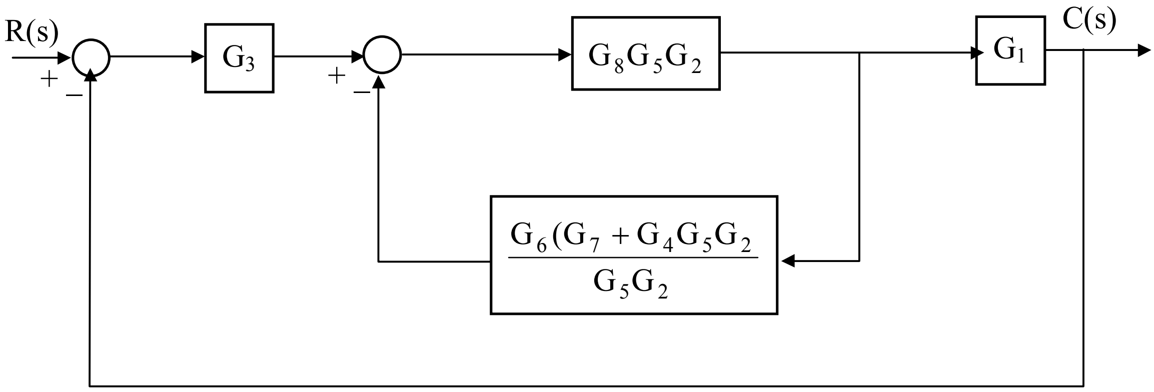


Ahora los bloques G_5 y G_2 se mueven delante del punto de bifurcación:



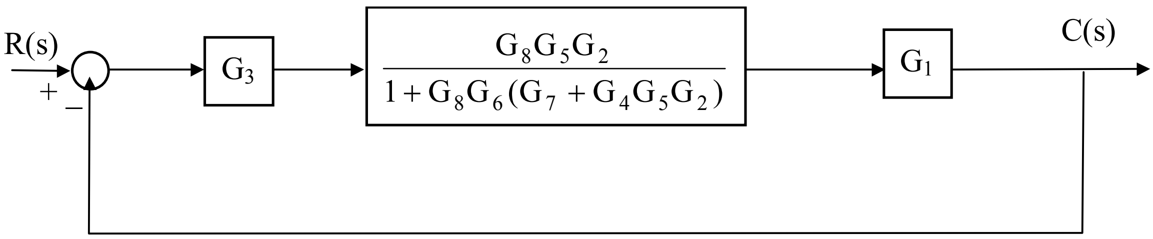
Se agrupan los bloques de la realimentación interna:





Agrupando en un único bloque la realimentación interna:

$$G'(s)=\frac{G_8G_5G_2}{1+G_8G_5G_2\,\frac{G_6(G_7+G_4G_5G_2}{G_5G_2}}=\frac{G_8G_5G_2}{1+G_8G_6(G_7+G_4G_5G_2)}$$



Agrupando finalmente los elementos restantes:

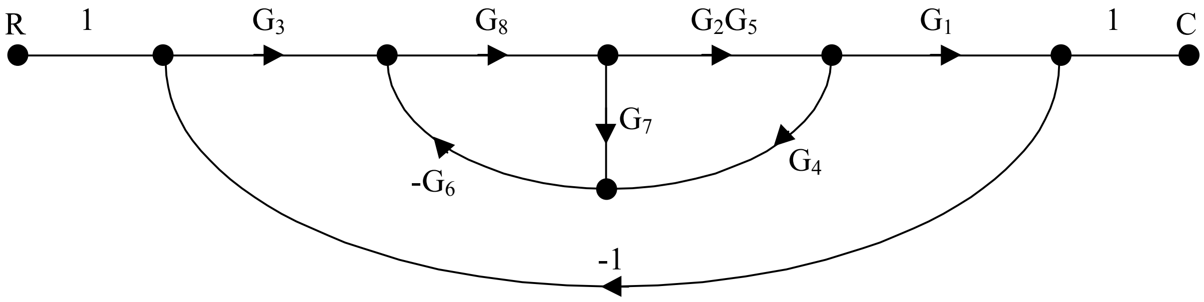
$$M(s)=\frac{G_3\,\frac{G_8G_5G_2}{1+G_8G_6(G_7+G_4G_5G_2)}\,G_1}{1+G_3\,\frac{G_8G_5G_2}{1+G_8G_6(G_7+G_4G_5G_2)}\,G_1}=\frac{\frac{G_1G_3G_8G_5G_2}{1+G_8G_6(G_7+G_4G_5G_2)}}{1+\frac{G_1G_3G_8G_5G_2}{1+G_8G_6(G_7+G_4G_5G_2)}}$$

$$M(s) = \frac{G_1G_3G_8G_5G_2}{1 + G_8G_6(G_7 + G_4G_5G_2) + G_1G_3G_8G_5G_2}$$

$$M(s) = \frac{G_1G_2G_3G_5G_8}{1 + G_6G_7G_8 + G_2G_4G_5G_6G_8 + G_1G_2G_3G_5G_8}$$

Aplicando la técnica de los flujogramas:

Se construye en primer lugar el flujograma correspondiente al sistema:



Se resuelve aplicando la regla de Mason:

La relación entre la salida C(s) y la entrada R(s), viene dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{\sum_k T_k \ \Delta_k}{\Delta}$$

siendo:

Δ (Determinante del flujograma.) = $1-\Sigma\lambda_i+\Sigma\lambda_{ij}-\Sigma\lambda_{ijk}+\ldots$

Trayectos directos: "aquellos que partiendo de un nodo fuente llegan a un nodo final sin pasar dos veces por el mismo nodo"

λ_i: ganancia de cada lazo.

$\Sigma\lambda_i$ igual a la suma de ganancias de los bucles que tienen algún nodo común con cualquier trayecto directo.

$\Sigma\lambda_{ij}$ igual a la suma de productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos bucles disjuntos.

T_K es la ganancia del k-ésimo trayecto directo.

Δ_K se calcula igual que Δ, pero eliminando los bucles que tienen algún nodo común con el k-ésimo trayecto directo.

Trayectos directos:

$$T_1 = G_3 G_8 G_2 G_5 G_1$$

Lazos:

$$\lambda_1 = -G_3 G_8 G_2 G_5 G_1$$

$$\lambda_2 = -G_8 G_7 G_6$$

$$\lambda_3 = -G_8 G_2 G_5 G_4 G_6$$

$$\sum \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -G_3 G_8 G_2 G_5 G_1 - G_8 G_7 G_6 - G_8 G_2 G_5 G_4 G_6$$

No existen lazos disjuntos.

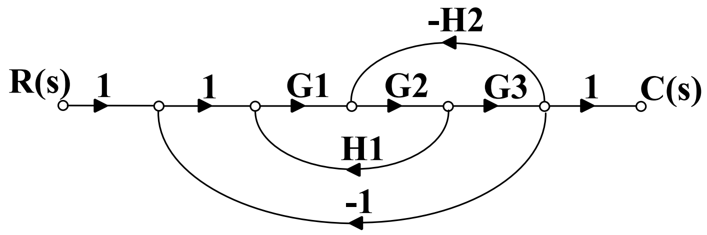
$$\Delta = 1 - \sum \lambda_i = 1 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + G_3 G_8 G_2 G_5 G_1 + G_8 G_7 G_6 + G_8 G_2 G_5 G_4 G_6$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{\sum_k T_k \, \Delta_k}{\Delta} = \frac{G_3 G_8 G_2 G_5 G_1}{1 + G_3 G_8 G_2 G_5 G_1 + G_8 G_7 G_6 + G_8 G_2 G_5 G_4 G_6}$$

EJERCICIO 2.6.

Calcular la función de transferencia $\frac{C(s)}{R(s)}$ del siguiente flujograma:



Trayectos Directos: $P_1 = G_1 G_2 G_3$

Lazos Independientes: $L_1 = G_1 G_2 H_1$

$$L_2 = -G_2 G_2 H_2$$

$$L_3 = -G_1 G_2 G_3$$

Determinante: $\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + ...$

$$\Delta = 1 - \left(G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3\right)$$

Cofactor:

$$P_1 = G_1G_2G_3$$

$$\Delta_1 = 1$$

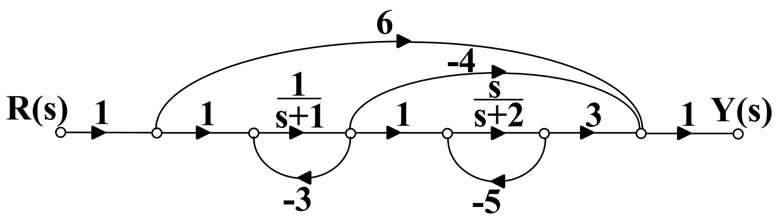
Entonces:

$$M(s) = \frac{1}{\Delta}\sum_k P_k\Delta_k$$

$$\boxed{M(s) = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}}$$

EJERCICIO 2.7.

Calcular la función de transferencia $\dfrac{Y(s)}{R(s)}$ del siguiente flujograma:



Trayectos Directos:

$$P_1 = \frac{3s}{(s+1)(s+2)}$$

$$P_2 = \frac{-4}{(s+1)}$$

$$P_3 = 6$$

Lazos Independientes:

$$L_1 = \frac{-3}{(s+1)}$$

$$L_2 = \frac{-5s}{(s+2)}$$

Pares de lazos:

$$L_1L_2 = \frac{15s}{(s+1)(s+2)}$$

Determinante:

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_bL_c - \sum L_dL_eL_f + \ldots$$

$$\Delta = 1 - \left(\frac{-3}{(s+1)} - \frac{5s}{(s+2)} \right) + \frac{15s}{(s+1)(s+2)}$$

Cofactores:

$$P_1 = \frac{3s}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$P_2 = -4/(s+1)$$

$$\Delta_2 = 1 + \frac{5s}{(s+2)}$$

$$P_3 = 6$$

$$\Delta_3 = 1 - \left(\frac{-3}{(s+1)} - \frac{5s}{(s+2)} \right) + \frac{15s}{(s+1)(s+2)}$$

Entonces:

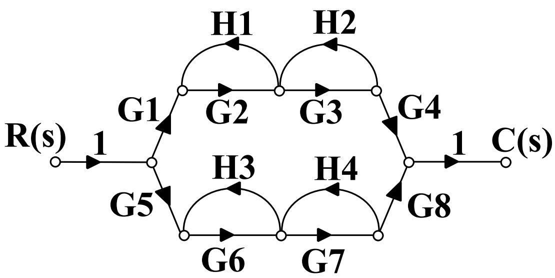
$$M(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

$$M(s) = \frac{\left(\frac{3s}{(s+1)(s+2)} \right)(1) + \left(\frac{-4}{s+1} \right)\left(1 + \frac{5s}{(s+2)} \right)}{1 - \left(\frac{-3}{(s+1)} - \frac{5s}{(s+2)} \right) + \frac{15s}{(s+1)(s+2)}} + \frac{6\left[1 + \frac{3}{(s+1)} + \frac{5s}{(s+2)} + \frac{15s}{(s+1)(s+2)} \right]}{1 - \left(\frac{-3}{(s+1)} - \frac{5s}{(s+2)} \right) + \frac{15s}{(s+1)(s+2)}}$$

$$\boxed{M(s) = \frac{36s^2 + 135s + 40}{6s^2 + 26s + 8}}$$

EJERCICIO 2.8.

Calcular la función de transferencia del siguiente flujograma:



Trayectos Directos:

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4$$

$$P_2 = G_5G_6G_7G_8$$

Lazos Independientes:

$$L_1 = G_2H_1$$

$$L_2 = G_3H_2$$

$$L_3 = G_6H_3$$

$$L_4 = G_7H_4$$

Pares de lazos:

$$L_1L_4 = G_2H_1G_7H_4$$

$$L_2L_3 = G_3H_2G_6H_3$$

Determinante:

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_bL_c - \sum L_dL_eL_f + ...$$

$$\Delta = 1 - \left(G_2H_1 + G_3H_2 + G_6H_3 + G_7H_4\right) + \left(G_2H_1G_7H_4 + G_3H_2G_6H_3\right)$$

Cofactores:

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4$$

$$\Delta_1 = 1 - \left(G_6H_3 + G_7H_4\right)$$

$$P_2 = G_5G_6G_7G_8$$

$$\Delta_2 = 1 - \left(G_2H_1 + G_3H_2\right)$$

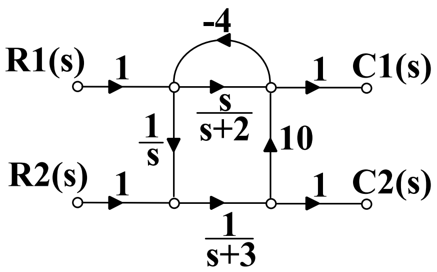
Entonces:

$$M(s) = \frac{1}{\Delta}\sum_k P_k\Delta_k$$

$$\boxed{M(s) = \frac{(G_1G_2G_3G_4)(1-(G_6H_3+G_7H_4)) + (G_5G_6G_7G_8)(1-(G_2H_1+G_3H_2))}{1-(G_2H_1+G_3H_2+G_6H_3+G_7H_4)+(G_2H_1G_7H_4+G_3H_2G_6H_3)}}$$

EJERCICIO 2.9.

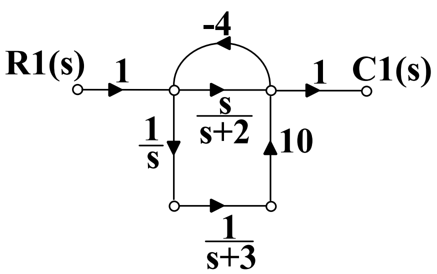
Calcular las funciones de transferencia indicadas para el siguiente flujograma:



$$T_{11} = \frac{C_1(s)}{R_1(s)} \qquad T_{21} = \frac{C_2(s)}{R_1(s)}$$

$$T_{21} = \frac{C_1(s)}{R_2(s)} \qquad T_{22} = \frac{C_2(s)}{R_2(s)}$$

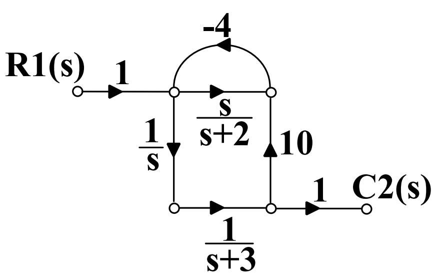
1- $T_{11} = C_1(s)/R_1(s)$



$$T_{11}(s) = \frac{\left(\frac{s}{s+2}\right)(1) + \left(\frac{10}{s(s+3)}\right)(1)}{1 - \left(\frac{-4s}{s+2}\right) - \left(\frac{-40}{s(s+3)}\right)}$$

$$\boxed{T_{11}(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 10s + 20}{5s^3 + 17s^2 + 46s + 80}}$$

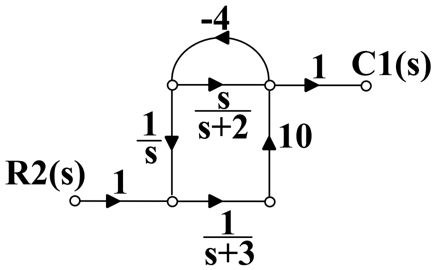
2- $T_{21} = C_2(s)/R_1(s)$



$$T_{21}(s) = \frac{\left(\frac{1}{s(s+3)}\right)(1)}{1 - \left(\frac{-4s}{s+2}\right) - \left(\frac{-40}{s(s+3)}\right)}$$

$$\boxed{T_{21}(s) = \frac{s+2}{5s^3 + 17s^2 + 46s + 80}}$$

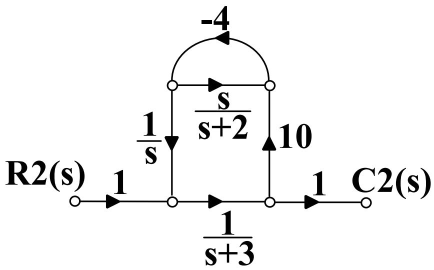
3- $T_{21} = C_1(s)/R_2(s)$



$$T_{12}(s) = \frac{\left(\frac{10}{(s+3)}\right)(1)}{1 - \left(\frac{-4s}{s+2}\right) - \left(\frac{-40}{s(s+3)}\right)}$$

$$\boxed{T_{12}(s)\frac{10s^2 + 2s}{5s^3 + 17s^2 + 46s + 80}}$$

4- $T_{22} = C_2(s)/R_2(s)$

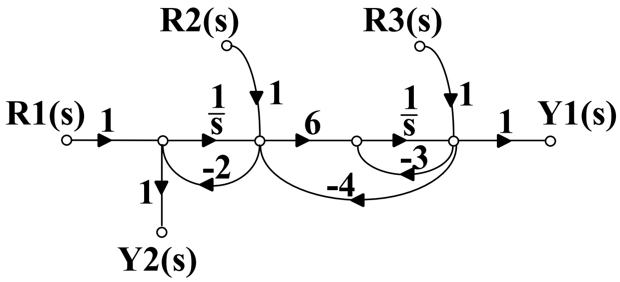


$$T_{22}(s) = \frac{\left(\frac{1}{(s+3)}\right)\left(1 - \frac{-40}{s(s+3)}\right)}{1 - \left(\frac{-4s}{s+2}\right) - \left(\frac{-40}{s(s+3)}\right)}$$

$$\boxed{T_{22}(s) = \frac{5s^2 + 2s}{5s^3 + 17s^2 + 46s + 80}}$$

EJERCICIO 2.10.

Calcular las funciones de transferencia del siguiente flujograma:

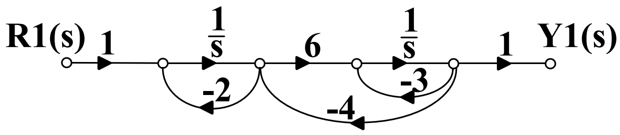


$$T_{11} = \frac{Y_1(s)}{R_1(s)} \qquad T_{12} = \frac{Y_1(s)}{R_2(s)}$$

$$T_{13} = \frac{Y_1(s)}{R_3(s)} \qquad T_{21} = \frac{Y_2(s)}{R_1(s)}$$

$$T_{22} = \frac{Y_2(s)}{R_2(s)} \qquad T_{23} = \frac{Y_2(s)}{R_3(s)}$$

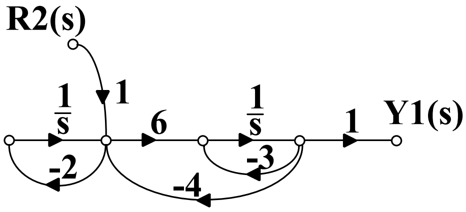
1- $T_{11} = Y_1(s)/R_1(s)$



$$T_{11}(s) = \frac{\left(\frac{6}{s^2}\right)(1)}{1 + \frac{2}{s} + \frac{3}{s} + \frac{24}{s} + \frac{6}{s^2}}$$

$$\boxed{T_{11}(s) = \frac{6}{s^2 + 29s + 6}}$$

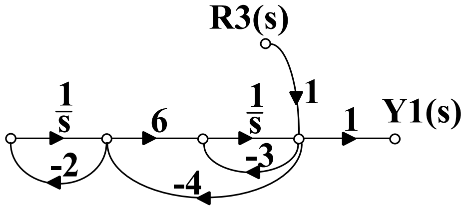
2- $T_{12} = Y_1(s)/R_2(s)$



$$T_{11}(s) = \frac{\left(\frac{6}{s}\right)(1)}{1 + \frac{2}{s} + \frac{3}{s} + \frac{24}{s} + \frac{6}{s^2}}$$

$$\boxed{T_{11}(s) = \frac{6s}{s^2 + 29s + 6}}$$

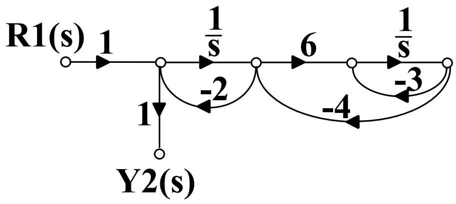
3- $T_{13} = Y_1(s)/R_3(s)$



$$T_{13}(s) = \frac{(1)\left(1+\frac{2}{s}\right)}{1+\frac{2}{s}+\frac{3}{s}+\frac{24}{s}+\frac{6}{s^2}}$$

$$\boxed{T_{13}(s) = \frac{s(s+2)}{s^2+29s+6}}$$

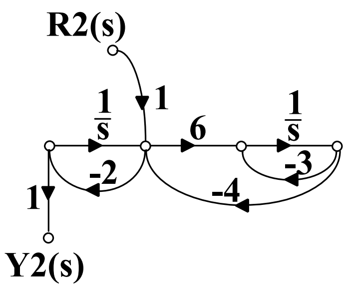
4- $T_{21} = Y_2(s)/R_1(s)$



$$T_{21}(s) = \frac{(1)\left(1+\frac{3}{s}+\frac{24}{s}\right)}{1+\frac{2}{s}+\frac{3}{s}+\frac{24}{s}+\frac{6}{s^2}}$$

$$\boxed{T_{21}(s) = \frac{s(s+27)}{s^2+29s+6}}$$

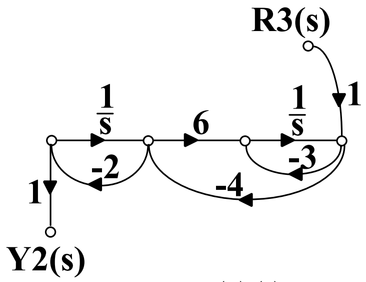
5- $T_{22} = Y_2(s)/R_2(s)$



$$T_{22}(s) = \frac{(-2)\left(1+\frac{3}{s}\right)}{1+\frac{2}{s}+\frac{3}{s}+\frac{24}{s}+\frac{6}{s^2}}$$

$$\boxed{T_{22}(s) = \frac{-s(2s+6)}{s^2+29s+6}}$$

6- $T_{23} = Y_2(s)/R_3(s)$

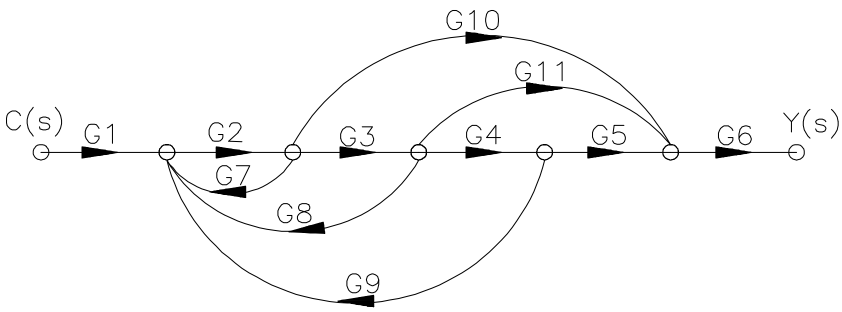


$$T_{23}(s) = \frac{(8)(1)}{1+\frac{2}{s}+\frac{3}{s}+\frac{24}{s}+\frac{6}{s^2}}$$

$$\boxed{T_{23}(s) = \frac{8s^2}{s^2+29s+6}}$$

EJERCICIO 2.11.

La función de transferencia G(s) viene definida por el siguiente diagrama de flujo:



Donde:	G1 = 1	G2 = 1/s	G3 = 1/s	G4 = 1/s	G5 = 4
G6 = 1	G7 = -1	G8 = -2	G9 = -3	G10 = 1	G11 = 2.

Calcular, mediante Mason, la función de transferencia de G(s).

$$G(s) = \frac{1}{\Delta}\sum_K T_K \cdot \Delta_K$$

Trayectos directos:

$$T_1 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_5 \cdot G_6 = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{s^3}$$

$$T_2 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_{10} \cdot G_6 = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{s}$$

$$T_3 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_{11} \cdot G_6 = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2}{s^2}$$

Determinante del sistema:

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c ...$$

$$\Delta = 1 - G_2 \cdot G_7 - G_2 \cdot G_3 \cdot G_8 - G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_9 = 1 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s^3}$$

Cofactores:

$$\Delta_1 = 1 \qquad \Delta_2 = 1 \qquad \Delta_3 = 1$$

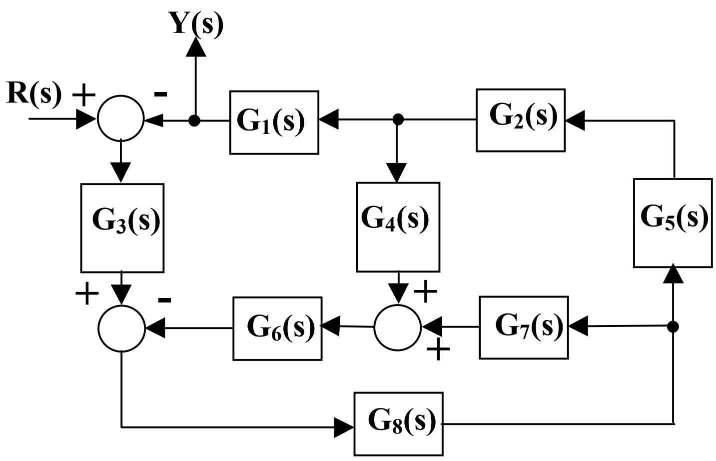
Función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\frac{4}{s^3} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}}{1 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s^3}} = \frac{\frac{4 + 2s + s^2}{s^3}}{\frac{s^3 + s^2 + 2s + 3}{s^3}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^3 + s^2 + 2s + 3}}$$

EJERCICIO 2.12.

Calcular la función de trasferencia del sistema de la figura mediante la aplicación de la regla de Mason:



$$G_1(s) = \frac{1}{s^2} \qquad G_2(s) = (s+1) \qquad G_3(s) = 5 \qquad G_4(s) = s$$

$$G_5(s) = \frac{1}{s} \qquad G_6(s) = 1 \qquad G_7(s) = \frac{1}{s+1} \qquad G_8(s) = s$$

$$T(s) = \frac{\sum T_n \cdot \Delta_n}{\Delta}$$

Trayectos:

$$T_1 = G_3 G_8 G_5 G_2 G_1$$

Lazos:

$$L_1 = -G_3G_8G_5G_2G_1$$

$$L_2 = -G_8G_5G_2G_4G_6$$

$$L_3 = -G_8G_7G_6$$

$$\Delta = 1-(-G_3G_8G_5G_2G_1 - G_8G_5G_2G_4G_6 - G_8G_7G_6)$$

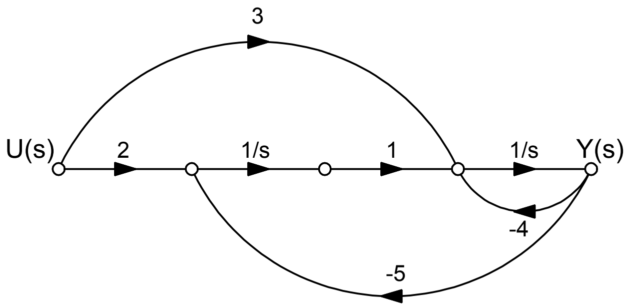
$$T(s) = \frac{G_3G_8G_5G_2G_1}{1-(-G_3G_8G_5G_2G_1 - G_8G_5G_2G_4G_6 - G_8G_7G_6)}$$

$$T(s) = \frac{5\cdot s\cdot\frac{1}{s}\cdot(s+1)\cdot\frac{1}{s^2}}{1-\left(-5\cdot s\cdot\frac{1}{s}\cdot(s+1)\cdot\frac{1}{s^2}-s\cdot\frac{1}{s}\cdot(s+1)\cdot s\cdot 1-s\cdot\frac{1}{s+1}\cdot 1\right)}$$

$$\boxed{T(s) = \frac{5(s+1)^2}{s^5+2s^4+3s^3+6s^2+10s+5}}$$

EJERCICIO 2.13.

G(s) está definida por el diagrama de flujo:



Obtener la función de transferencia.

Aplicando la regla de Mason:

$$T = \frac{\sum T_n \cdot \Delta_n}{\Delta}$$

Trayectos directos:

$$T_1 = \frac{3}{s} \qquad \Delta_1 = 1$$

$$T_2 = \frac{2}{s^2} \qquad \Delta_2 = 1$$

Lazos independientes:

$$L_1 = -\frac{4}{s}$$

$$L_2 = -\frac{5}{s^2}$$

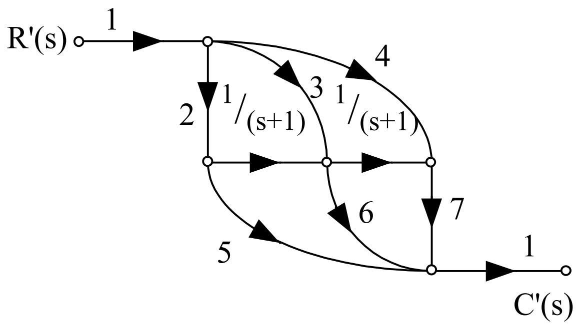
$$\Delta = 1 + \frac{4}{s} + \frac{5}{s^2}$$

$$G(s) = \frac{\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}}{1 + \frac{4}{s} + \frac{5}{s^2}} = \frac{\frac{3s+2}{s^2}}{\frac{s^2+4s+5}{s^2}} = \frac{3s+2}{s^2+4s+5}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{3(s+0.66)}{s^2+4s+5}}$$

EJERCICIO 2.14.

Obtener la función de transferencia de una planta que viene definida por el siguiente flujograma:



La relación entre la salida C'(s) y la entrada R'(s), viene dada por:

$$\frac{C'(s)}{R'(s)} = M'(s) = \frac{\sum_k T_k \, \Delta_k}{\Delta}$$

$$T_1 = 2 \cdot 5 = 10 \qquad \Delta_1 = 1$$

$$T_2 = 3 \cdot 6 = 18 \qquad \Delta_2 = 1$$

$$T_3 = 4 \cdot 7 = 28 \qquad \Delta_3 = 1$$

$$T_4 = 2 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot 6 = \frac{12}{s+1} \qquad \Delta_4 = 1$$

$$T_5 = 2 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot 7 = \frac{14}{(s+1)^2} \qquad \Delta_5 = 1$$

$$T_6 = 3 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot 7 = \frac{21}{s+1} \qquad \Delta_6 = 1$$

Bucles: No hay

Bucles disjuntos: No hay.

Luego, sustituyendo:

$$\Delta. = 1-\Sigma\lambda_i+\Sigma\lambda_{ij}-\Sigma\lambda_{ijk}+\ldots = 1 - 0 = 1$$

Se tiene entonces:

$$M'(s) = \frac{\sum_k T_k \ \Delta_k}{\Delta} = \frac{T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2 + \ldots + T_6\Delta_6}{1}$$

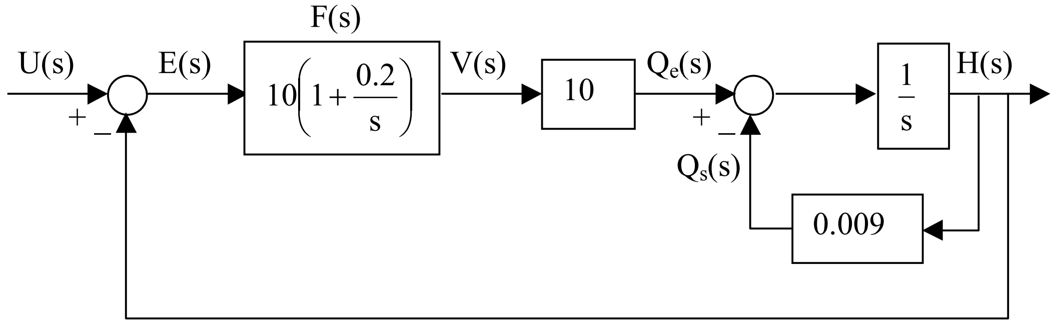
$$M'(s) = 10 + 18 + 28 + \frac{12}{s+1} + \frac{14}{(s+1)^2} + \frac{21}{s+1} = 56 + \frac{33}{s+1} + \frac{14}{(s+1)^2}$$

$$M'(s) = \frac{56s^2 + 112s + 56 + 33s + 33 + 14}{(s+1)^2}$$

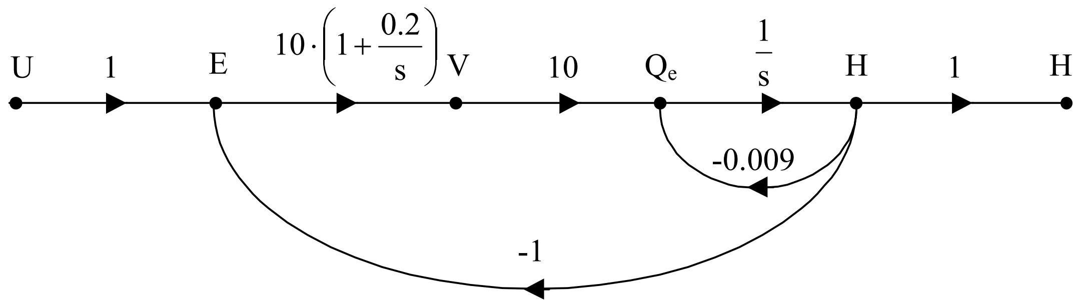
$$\boxed{M'(s) = \frac{56s^2 + 145s + 103}{(s+1)^2}}$$

EJERCICIO 2.15.

Para el sistema del ejercicio 1.14. hallar la función de transferencia que relaciona la altura del líquido en el depósito h(t) y la tensión de referencia u(t), mediante la técnica de flujogramas. En el ejercicio 1.14. el sistema quedó definido por el siguiente diagrama de bloques:



Obtener en primer lugar el flujograma correspondiente al diagrama de bloques mostrado en la figura.



Aplicando la Regla de Mason se obtendrá la función de transferencia:

$$T = \frac{\sum T_n \Delta_n}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \ldots$$

$$T_1 = 10\cdot\left(1+\frac{0.2}{s}\right)\cdot 10\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$L_1 = 10\left(1+\frac{0.2}{s}\right)\cdot 10\cdot\frac{1}{s}\cdot(-1)$$

$$L_2 = \frac{1}{s}(-0.009)$$

$$\Delta = 1 - \left[10\left(1+\frac{0.2}{s}\right)\cdot 10\cdot\frac{1}{s}\cdot(-1) + \frac{1}{s}(-0.009)\right]$$

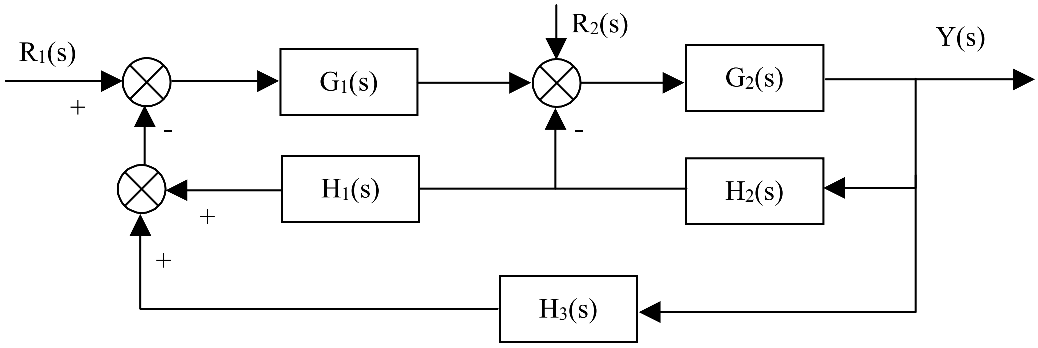
$$T = \frac{H(s)}{U(s)} = \frac{100\frac{s+0.2}{s^2}}{1+100\frac{s+0.2}{s^2}+\frac{0.009}{s}}$$

$$T = \frac{H(s)}{U(s)} = \frac{100(s+0.2)}{s^2+100s+20+0.009s}$$

$$\boxed{T = \frac{H(s)}{U(s)} = \frac{100(s+0.2)}{s^2+100.009s+20}}$$

EJERCICIO 2.16.

Dado un sistema de control representado por el siguiente diagrama de bloques:

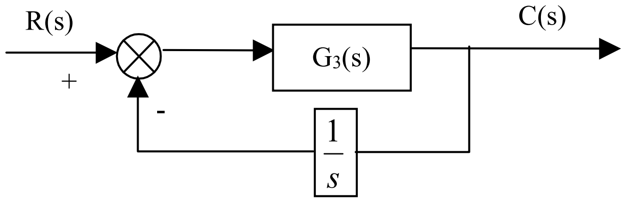


1.- Dibujar el flujograma correspondiente.

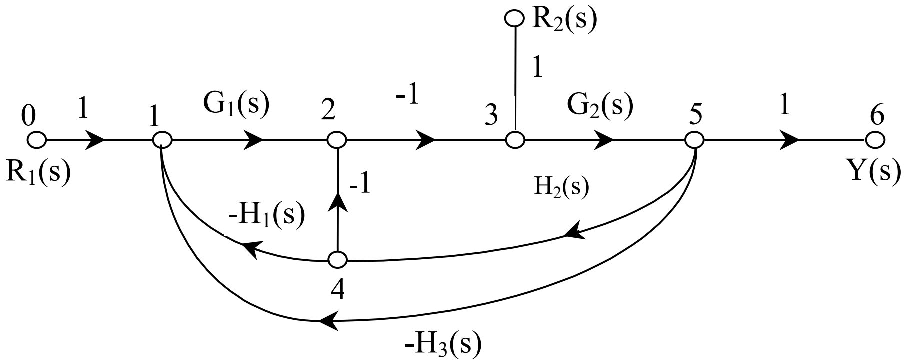
2.- Si se hace $R_2(s) = 0$, hallar mediante la regla de Mason, $\dfrac{Y(s)}{R_1(s)} = M(s)$

3.- Si en M(s), hacemos $H_2(s) = H_3(s) = 1$; $H_1(s) = \dfrac{1}{s}$; $G_1(s) = K$ y $G_2(s) = \dfrac{1}{(s+4)(s+6)}$.

Obtener la función de transferencia $G_3(s)$ para que M(s) sea equivalente al sistema de la figura:



1. Flujograma: Sustituyendo el diagrama de bloques:



2- Ahora $R_2(s) = 0$. La función de transferencia global del sistema será:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{\sum T_K \cdot \Delta_K}{\Delta}$$

Trayectos directos: 0 – 1 – 2 – 3 – 5 – 6 : $G_1(s)\cdot G_2(s)$

Bucles: B_1: 1 – 2 – 3 – 5 – 1 : $G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot[-H_3(s)]$

B_2: 1 – 2 – 3 – 5 – 4 – 1: $G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot[-H_1(s)]\cdot H_2(s)$

B_3: 2 - 3 – 5 – 4 –2 : $G_2(s)\cdot[-H_2(s)]$

Bucles disjuntos: No hay.

Luego, sustituyendo:

$$\Delta. = 1 - [G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot[-H_3(s)] + G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot[-H_1(s)]\cdot H_2(s) + G_2(s)\cdot[-H_2(s)]] + 0 =$$

$$= 1 + G_2(s)\cdot[G_1(s)\cdot[-H_3(s)] + G_1(s)\cdot[-H_1(s)]\cdot H_2(s) + H_2(s)]$$

$$\Delta_K = \Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$T_1 = G_1(s)\cdot G_2(s)$$

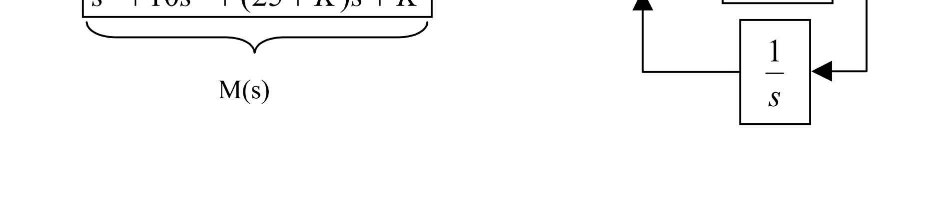
Se tiene entonces:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{\sum T_K \cdot \Delta_K}{\Delta} = \frac{G_1(s)\cdot G_2(s)}{1 + G_2(s)\cdot\left[G_1(s)\cdot H_3(s) + G_1(s)\cdot H_1(s)\cdot H_2(s) + H_2(s)\right]}$$

3. Ahora, $H_2(s) = H_3(s) = 1;\quad H_1(s) = \frac{1}{s};\quad G_1(s) = K;\quad G_2(s) = \frac{1}{(s+4)(s+6)}$

sustituyendo en la ecuación anterior de M(s), se tiene:

$$M(s) = \frac{\dfrac{K}{(s+4)(s+6)}}{1 + \dfrac{1}{(s+4)(s+6)}\cdot\left(K + \dfrac{K}{s} + 1\right)} = \frac{Ks}{s(s+4)(s+6) + s(K+1) + K} = \frac{Ks}{s^3 + 10s^2 + (25+K)s + K}$$



$$M(s) = \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)\cdot\frac{1}{s}} = \frac{s\cdot G_3(s)}{s + G_3(s)} \quad \Rightarrow \quad G_3(s) = \frac{s\cdot M(s)}{s - M(s)} = \frac{K}{s^2 + 10s + (25 + K)}$$

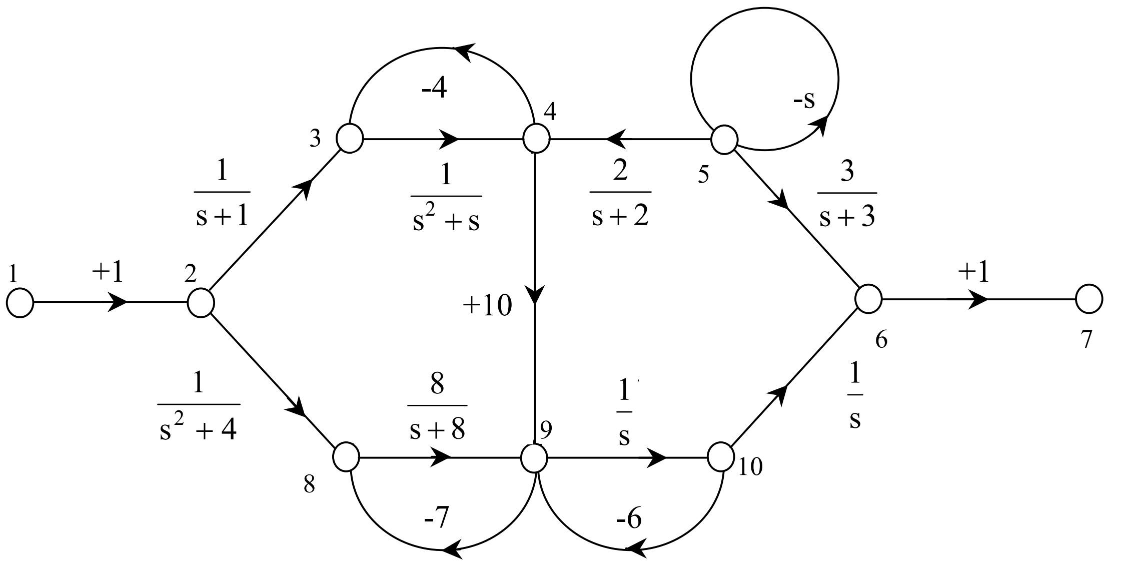
Luego la función de transferencia en lazo abierto del nuevo sistema, teniendo en cuenta que $K = 1000$, será:

$$F.T.L.A.' = \frac{1}{s}\cdot K\cdot G_3(s)$$

$$\boxed{F.T.L.A.' = \frac{1000}{s(s^2 + 10s + 1025)}}$$

EJERCICIO 2.17.

G(s) es la función de transferencia de una planta, de la que se conoce su flujograma, que es el siguiente:



Calcular la función de transferencia de la planta, aplicando la regla de Mason.

Trayectos directos:

$$1-2-3-4-9-10-6-7 \equiv P_1 = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+s}\cdot 10\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{10}{s^2(s^2+s)(s+1)}$$

$$1-2-8-9-10-6-7 \equiv P_2 = \frac{1}{s^2+4}\cdot\frac{8}{s+8}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{8}{s^2(s^2+4)(s+8)}$$

Lazos disjuntos:

$$L_1 = \frac{-4}{s^2+s};\quad L_2 = -s;\quad L_3 = -7\cdot\frac{8}{s+8} = \frac{-56}{s+8};\quad L_4 = -6\cdot\frac{1}{s} = \frac{-6}{s};$$

$$L_5 = 10\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{3}{s+3}\cdot\frac{s}{s+2} = \frac{30}{s(s+2)(s+3)}$$

Determinante del flujograma:

$$\Delta = 1-\left(L_1+L_2+L_3+L_4\right)+\left(L_1L_2+L_1L_3+L_1L_4+L_2L_3+L_2L_4\right)-\left(L_1L_2L_3+L_1L_2L_4\right)$$

$$\Delta = 1-\left(\frac{-4}{s^2+s}-s-\frac{56}{s+8}-\frac{6}{s}\right)+\left(\frac{-4(-s)}{s^2+s}\right)+\left(\frac{-4(-56)}{(s^2+s)(s+8)}\right)+\left(\frac{-4(-6)}{s(s^2+s)}\right)+$$
$$+\left(\frac{-s(-56)}{s+8}\right)++\left(\frac{-s(-6)}{s}\right)--\left(\frac{-4}{s^2+s}\cdot(-s)\cdot\frac{-56}{s+8}+\frac{-4}{s^2+s}\cdot(-s)\cdot\frac{-6}{s}\right)$$

$$\Delta = \frac{s^5+72s^4+193s^3+450s^2+520s+192}{s^2(s+1)(s+8)}$$

Cofactores:

$$\Delta_1 = 1-L_2 = 1-(-s) = 1+s$$

$$\Delta_2 = 1-(L_1+L_2)+L_1\cdot L_2 = 1-\left(\frac{-4}{s^2+s}+(-s)\right)+\left(\frac{4s}{s^2+s}\right) = \frac{s^3+2s^2+5s+4}{s(s+1)}$$

Luego,

$$G(s) = \frac{P_1\cdot\Delta_1+P_2\cdot\Delta_2}{\Delta}$$

Y sustituyendo los valores queda:

$$\boxed{G(s) = \frac{18s^3+96s^2+80s+352}{s(s^2+4)(s^5+72s^4+193s^3+450s^2+520s+192)}}$$